VIENNA SUMMER OF LOGIC 2014

Wien, 10.6.2014

Logik ist wie abstrakte Malerei

Die moderne Logik brachte eine Entfesselung der Mathematik. Auch dort, wo Sprache und Anschauung versagen, lassen sich mit Hilfe der Logik schlüssige Gedankengebäude errichten.

Mit Zahlen mussten wir schon beim Schokoladeteilen im Kindergarten irgendwie umgehen, und auch kompliziertere mathematische Objekte kann man sich oft intuitiv vorstellen – etwa Vektoren, als kleine Pfeilchen auf einem Blatt Papier. Aber wie zeichnet man eine nichtkommutative Algebra? Wie soll man Quaternionen oder Tensorprodukte verstehen, wenn man sie nicht aus Schokolade nachbauen kann? Wenn man versucht, ganz abstrakten mathematischen Objekten beizukommen, ohne sich in Definitions-Widersprüche zu verheddern, oder wenn man gar mit mathematischen Methoden die Mathematik selbst untersuchen will, dann benötigt man die Logik.

Eine Sprache, um über Mathematik zu reden

„Die Frage, was ein Beweis ist, gehört eigentlich nicht zur Mathematik“, erklärt Prof. Matthias Baaz vom Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien. Oft redet man in der Mathematik von einem „schönen Beweis“ oder von einer „unmittelbar einsichtigen Aussage“. Doch die Mathematik gibt keine Auskunft darüber, ob der Beweis nicht vielleicht sogar auf noch einfachere Weise geführt werden könnte. Die Logik geht einen Schritt weiter. „Sie schützt die Mathematik vor Fehlern, die sich aus falschen sprachlichen Konzepten ergeben“, meint Matthias Baaz.

Nicht immer war die Logik so eng mit der Mathematik verknüpft. Im Mittelalter galt sie eher als Teil der Philosophie, als Regelwerk für sauberes sprachliches Argumentieren. Doch im zwanzigsten Jahrhundert änderte sich das dramatisch.

Gegenständliche und abstrakte Mathematik

Der deutsche Mathematiker David Hilbert gehörte zu den bahnbrechenden Fürsprechern der Logik in der Mathematik. Er plädierte dafür, die gesamte bekannte Mathematik mit Hilfe der Logik sauber und eindeutig auf eine kleine Anzahl einfacher mathematischer Grundannahmen zurückzuführen. Aus diesen simplen Axiomen sollte sich die gesamte Mathematik ableiten lassen, ohne dass irgendwo Raum für sprachliche Ungenauigkeiten bleibt. Selbst scheinbare Trivialitäten sollten sauber formal bewiesen werden, ohne Zurückgreifen auf Intuition. So bewiesen etwa Bertrand Russell und Alfred Whitehead in ihren „Principia Mathematica“ sogar die Aussage „1+1=2“ streng mit logischen Mitteln.

Hilbert sah die Mathematik zweigeteilt: Eine „reale“ Mathematik, die intuitiv erfassbar und im Sinne Kants a priori vorgegeben ist, beschreibt die realen Objekte unserer Erfahrungswelt. Daneben gibt es noch eine abstraktere Mathematik, eine Welt von Objekten, mit denen man dank sauberer Logik auch dann noch arbeiten kann, wenn die anschauliche Intuition für sie fehlt.

„Diese Entwicklung zu einer abstrakten Mathematik geschah ungefähr zur selben Zeit, in der sich auch die Kunst vom Gegenständlichen zum Abstrakten entwickelte“, sagt Matthias Baaz. „Bei der Abstraktion bleiben die Grundtechniken gleich, doch die Beziehung zur Welt um uns herum ändert sich.“

Treffen sich zwei Parallele im Unendlichen …

Die Beziehung zwischen Realem und Abstraktem in der Mathematik lässt sich etwa am berühmten Parallelenaxiom untersuchen: Der griechische Mathematiker Euklid von Alexandria entwickelte eine Geometrie, die auf einfachen Grundaxiomen aufbaute – ähnlich wie Hilbert das viel später für die gesamte Mathematik forderte. Euklids fünftes Axiom allerdings klang nicht ganz so einleuchtend wie die anderen. In seiner modernen Formulierung sagt es: „Zu jeder beliebigen Geraden gibt es genau eine parallele Gerade, die durch einen gegebenen Punkt verläuft.“

Wenn man in Kategorien einer realen Mathematik denkt und untersucht, ob man auf Euklids fünftes Axiom verzichten kann, dann stößt man auf ganz neue Geometrien – etwa auf die Geometrie der Kugeloberfläche, in der sich alle Großkreise irgendwo schneiden und jedes Dreieck eine Winkelsumme von mehr als 180 Grad hat. Die Erkenntnis, dass das Parallelenaxiom nicht unbedingt nötig ist, ergibt sich also aus einer ganz neuen geometrischen Wirklichkeit, die für sich genommen auch wieder anschaulich verständlich ist.

Eigentlich ist es aber gar nicht nötig, solche alternative Geometrien zu erschaffen. Mit den Methoden der Logik kann man formal untersuchen, ob bestimmte Grundannahmen zueinander passen oder einander widersprechen, oder ob eine davon vielleicht gar keine zusätzliche Grundannahme ist, weil sie sich bereits aus den anderen logisch ableiten lässt. „Aus Sicht der formalen Logik kann man einfach sagen: Euklids fünftes Axiom folgt nicht aus den anderen Axiomen, und sowohl das fünfte Axiom als auch sein Gegenteil sind mit den anderen verträglich“, erklärt Matthias Baaz. „Man kann sich also gewissermaßen aussuchen, ob das Parallelenaxiom wahr ist oder nicht. Anschaulich gesprochen ergibt sich dann, je nachdem, wie man sich entscheidet, die ebene, euklidische Geometrie, oder eben eine andere.“

Ganze Theorien lassen sich auf ihre Konsistenz überprüfen. Das ist für die Mathematik wichtig – einen Satz, der ebenso beweisbar ist wie sein Gegenteil darf es in der Mathematik nicht geben – aber auch auf ganz anderen Gebieten, zum Beispiel im Rechtswesen. Für solche Untersuchungen steht heute ein bunter Werkzeugkasten unterschiedlicher Methoden zur Verfügung: Neben der klassischen Logik verwendet man heute auch andere Logik-Systeme, etwa Logiken, die nicht bloß wahr und falsch kennen, sondern auch Zwischentöne. Oder die sogenannten Modallogiken, die in ihren Folgerungen Begriffe wie „notwendigerweise“ oder „möglicherweise“ kennen: So ist ein Kreis notwendigerweise rund, aber ein Tisch nicht notwendigerweise eckig.

Eine schöne neue Welt

„Die Logik hat die Mathematik entfesselt“, sagt Matthias Baaz. Und trotzdem hat er den Eindruck, dass manche Mathematiker noch immer eine gewisse Abneigung gegen die Logik hegen: „Die Logik verhält sich wie Till Eulenspiegel – sie nimmt alles ganz wörtlich, was man ihr sagt. Das mögen manche Leute nicht.“ Doch wenn man sich eingelassen hat auf das Abenteuer der Logik, dann bekommt man am Ende nicht bloß mathematische Sätze, die unsere Welt beschreiben, sondern eine neue Welt, in der Widersprüche und Inkonsistenzen brav im Zaum gehalten werden können. Wer würde sich das nicht manchmal wünschen!

Vienna Summer of Logic

Der „Vienna Summer of Logic“ vom 9. bis zum 24. Juli wird von der Kurt Gödel Society organisiert. Er ist in drei Themenblöcke gegliedert: Informatik, künstliche Intelligenz und mathematische Logik. Zahlreiche berühmte Persönlichkeiten aus der Forschung werden erwartet – unter ihnen die Turing-Preis-Gewinner Edmund Clarke und Dana Scott. Insgesamt werden 2.500 TeilnehmerInnen erwartet. In einer Logik-Olympiade werden Computerprogramme gegeneinander antreten. Drei mit jeweils 100.000 Euro dotierte Stipendien der Kurt Gödel Gesellschaft werden vergeben.

Florian Aigner

Weitere Informationen:

Oliver Lehmann
VSL Media and Public Affairs Chair
Institute of Science and Technology Austria
oliver.lehmann@ist.ac.at
T: +43 2243 9000-1006 | M: +43 676 40 12 562

Katarina Jurik
VSL Communications
Technische Universität Wien
jurik@forsyte.at
T: +43 1 588 01-18 48 06

Web: vsl2014.logic.at